DVĚ

LOKÁLNÍ PŘÍMKA, GLOBÁLNÍ KŘIVKA

Možná si říkáte, že nepotřebujete profesionálního matematika, aby vás poučoval, že všechny křivky nejsou rovné. Lineární myšlení se však projevuje všude. Dopouštíme se jej pokaždé, když říkáme, že pokud je výhodné něco mít, je ještě lepší mít toho více. Tohoto zjednodušení využívají političtí křiklouni: „Podporujete vojenský zásah proti Íránu? Myslím, že byste chtěl provést *pozemní invazi* do každé země, jejíž představitelé *si dovolí nás kritizovat*!“ Nebo naopak: „Sblížení s Íránem? Nejspíš se *také* domníváte, že jsme se měli *Adolfu Hitlerovi* snažit *lépe porozumět*.“

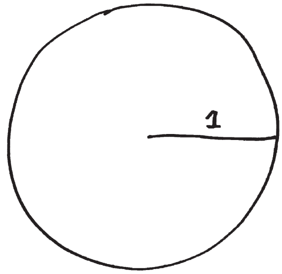
Proč je tento typ uvažování tak oblíbený, když se stačí na okamžik zamyslet, abychom si uvědomili, jak je nesprávný? Proč by se kdokoli třeba jen na okamžik domníval, že všechny křivky jsou přímé čáry, když to zjevně neplatí?

Jeden z důvodů spočívá v tom, že v jistém smyslu to vlastně platí. Tento příběh začíná u Archimeda.

Vyčerpání

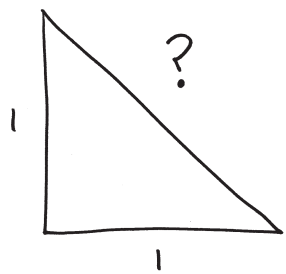
Jakou plochu má tento kruh?

V moderní době je tento problém tak banální, že bychom jej mohli najít ve školních testech. Plocha kruhu je dána vzorcem πr^2. Poloměr r se v tomto případě rovná 1, takže plocha odpovídá číslu π. Před dvěma tisíci lety se však jednalo o nepříjemnou otevřenou otázku, která byla natolik důležitá, že se na ni zaměřil samotný Archimedes.



Proč to bylo tak těžké? V prvé řadě staří Řekové nepovažovali číslo π za číslo jako my. Čísla, kterým rozuměli, patřila do množiny celých čísel, kterými bylo možné počítat předměty: 1, 2, 3, 4… Avšak ukázalo se, že již první velký úspěch řecké geometrie – Pythagorova věta* – způsobil zkázu jejich číselného systému.

Uveďme obrázek:



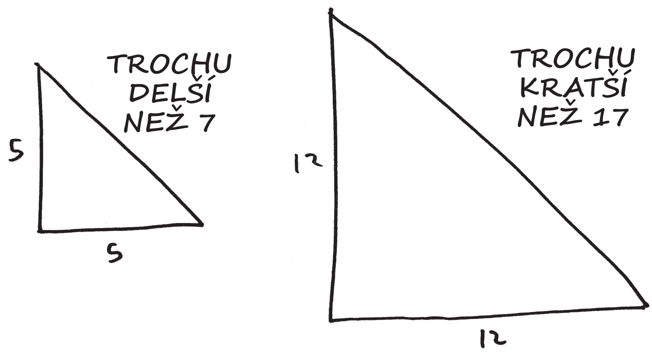
Pythagorova věta tvrdí, že obsah čtverce nad *přeponou* – stranou pravoúhlého trojúhelníka, která nesousedí s pravým úhlem – se rovná součtu čtverců nad zbývajícími dvěma stranami neboli *odvěsnami*. Na tomto obrázku to znamená, že čtverec nad přeponou má plochu $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Konkrétně platí, že přepona je delší než 1 a kratší než 2 (jak se můžeme přesvědčit na vlastní oči a nepotřebujeme přitom žádnou matematickou větu). To, že délka nebyla dána celým číslem, pro Řeky samo o sobě nepředstavovalo problém. Mohli si to vysvětlit tím, že vše měřili nesprávnými jednotkami. Pokud by zvolili měrnou jednotku tak, aby byly odvěsny dlouhé 5 jednotek, mohli by pravítkem zjistit, že přepona má asi 7 jednotek. Zhruba sedm – ale je trochu delší. Čtverec nad přeponou se totiž rovná

* Mimochodem nevíme, kdo Pythagorovu větu dokázal jako první, ale vědci jsou si téměř jisti, že samotný Pythagoras to nebyl. Ve skutečnosti o něm nevíme téměř nic kromě základního faktu, který dosvědčují jeho současníci, že v šestém století před naším letopočtem žil a proslavil se vzdělaný muž tohoto jména. Základní vyprávění o jeho životě a díle pocházejí z období téměř osm set let po jeho smrti. V té době již skutečného Pythagora úplně nahradil jeho mýtus, jenž do jedné osoby shrnul filozofii všech učenců, kteří se označovali za pythagorejce.

$5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$

a pokud by přepona byla dlouhá 7 jednotek, její čtverec by měl plochu $7 \times 7 = 49$.

Případně pokud by odvěsny byly dlouhé 12 jednotek, měla by přepona téměř přesně 17 jednotek. Byla by však maličko kratší, protože $12^2 + 12^2$ je 288, což je nepatrně méně než 17^2 neboli 289.



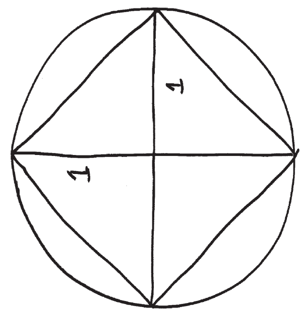
A někdy v pátém století před naším letopočtem jeden z členů pythagorejské školy zjistil šokující věc: neexistoval *žádný způsob*, jak změřit rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník tak, aby délky všech jeho stran udávala celá čísla. Dnešní matematici by řekli, že „druhá odmocnina ze dvou je iracionální číslo", což znamená, že není určeno podílem žádných dvou celých čísel. Pythagorejci však nic takového neprohlásili. Jak by mohli? Jejich idea množství byla postavena na poměrech celých čísel. Z jejich hlediska se ukázalo, že délka té přepony *vůbec není číslo*.

To způsobilo pořádný zmatek. Je totiž potřeba připomenout, že pythagorejci byli výjimeční podivíni. Jejich filozofie představovala nesourodou směs různých prvků: některé bychom dnes zařadili do matematiky, jiné spíše do náboženství a ještě další bychom považovali za známku duševní choroby. Věřili, že lichá čísla jsou dobrá a sudá čísla zlá, že na druhé straně Slunce se nachází planeta Antichthon stejná jako naše Země a že bychom neměli jíst fazole, podle některých zpráv kvůli tomu, že ukrývají duše zemřelých lidí. O samotném Pythagorovi se říkalo, že dokáže rozmlouvat s dobytkem (zvířata mu prozradila, že nemá jíst fazole). Patřil také k nemnohým Řekům, kteří v té době nosili kalhoty.

Matematika pythagorejců byla neoddělitelně spjata s jejich ideologií. Podle legendy (asi není pravdivá, ale poskytuje dobrou představu o pythagorejském přístupu) dokázal iracionalitu druhé odmocniny ze dvou muž jménem Hippasus. Za to, že dokázal takový nechutný teorém, jej jeho kolegové vrhli do moře, kde se utopil.

Objevený teorém však utopit nedokázali. Následníci pythagorejců jako Eukleides a Archimedes chápali, že si musí vyhrnout rukávy a některé objekty měřit, i když se dostanou mimo úhlednou zahrádku celých čísel. Nikdo tehdy nevěděl, zda lze pouze pomocí celých čísel vyjádřit plochu kruhu.[*] Kola se však musí točit a sila je nutné naplnit,[**] takže bylo potřeba pustit se do měření.

S původní myšlenkou přišel Eudoxos z Knidu a Eukleides ji zahrnul do dvanácté knihy svých Základů. Teprve Archimedes však celý projekt doopravdy rozvinul. Dnes jeho přístup označujeme jako *metodu vyčerpání*. A začíná se následujícím způsobem.



Čtverec na obrázku se označuje jako *vepsaný čtverec*. Každý z jeho rohů se kruhu pouze dotýká, ale jeho okraj nepřesahuje. K čemu je to dobré? Kruhy jsou totiž záhadné a hrozivé, ale se čtverci se oproti nim pracuje snadno. Pokud před sebou máme čtverec s délkou strany X, jeho plocha se rovná prostě X krát X – proto druhé mocnině čísla říkáme také čtverec (kvadrát). Základní pravidlo matematického života zní: pokud vás svět postaví před obtížný problém, pokuste se nejdříve vyřešit jednodušší problém a doufejte, že jednoduchá verze bude natolik blízká tomu původnímu problému, že vám to svět odpustí.

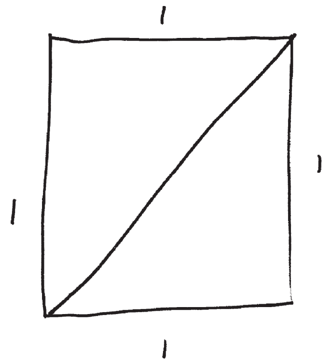
Vepsaný čtverec lze rozdělit na čtyři trojúhelníky, které přesně odpovídají rovnoramennému trojúhelníku, který jsme nakreslili před chvílí.[***] Plocha čtverce je tedy čtyřikrát větší než plocha trojúhelníka. Tento trojúhelník zase vznikl tak, že jsme vzali

* Ve skutečnosti to není možné, ale až do osmnáctého století to nikdo neuměl dokázat.

** Sila až do začátku dvacátého století vlastně kulatá nebyla. Teprve tehdy profesor H. W. King z Univerzity ve Wisconsinu vyvinul nyní všudypřítomný válcový návrh, aby vyřešil problém s hnitím úrody v rozích.

*** Přesněji bychom měli říci, že každý ze čtyř dílů čtverce můžeme z původního rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka získat posunutím a otočením v rovině. Automaticky však předpokládáme, že tyto manipulace plochu geometrického útvaru nemění.

čtverec o rozměrech 1 × 1 a rozdělili jsme jej úhlopříčně napůl jako sendvič s tuňákem.

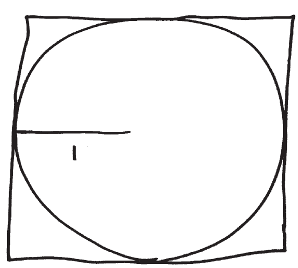


Sendvič s tuňákem měl plochu 1 × 1 = 1, takže každý poloviční trojúhelníkový sendvič má plochu 1/2 a oblast vepsaného kruhu se rovná 4 krát 1/2 neboli 2.

Mimochodem představte si, že Pythagorovu větu *neznáte*. Kouzlo – nyní ji už znáte! Nebo alespoň víte, co říká o tomto konkrétním pravoúhlém trojúhelníku. Vzhledem k tomu, že pravoúhlý trojúhelník, který ohraničuje dolní polovinu sendviče s tuňákem, je přesně stejný jako trojúhelník v levém horním rohu vepsaného čtverce. A jeho přepona odpovídá straně vepsaného čtverce. Když tedy přeponu umocníte, dostanete plochu vepsaného čtverce, která se rovná 2. Jinak řečeno délka přepony je dána číslem, které po umocnění poskytne číslo 2, nebo – když to formulujeme stručnějším běžným způsobem – se rovná druhé odmocnině ze dvou.

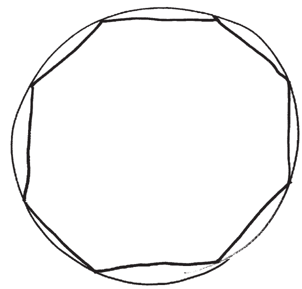
Vepsaný čtverec je zcela uzavřen uvnitř kruhu. Jestliže má plochu 2, plocha kruhu musí být *minimálně* 2.

Nyní nakreslíme jiný čtverec.



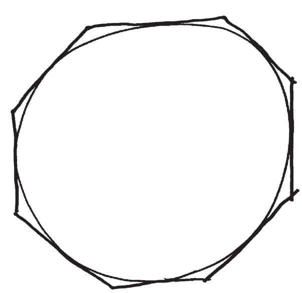
Tento čtverec se nazývá *opsaný* a také se kruhu dotýká v pouhých čtyřech bodech. Tento čtverec však kruh obklopuje zvnějšku. Jeho strany jsou dlouhé 2 jednotky, takže má plochu 4. Víme tedy, že plocha kruhu může být maximálně 4.

Důkaz toho, že číslo pí leží mezi čísly 2 a 4, možná nevypadá příliš působivě. Ale Archimedes se teprve pouštěl do práce. Nyní vezměme čtyři rohy vepsaného čtverce a na kruhu vyznačme nové body, které budou ležet v polovině mezi jednotlivými dvojicemi rohů. Získáme tak osm rovnoměrně rozmístěných bodů. Když je spojíme, dostaneme vepsaný osmiúhelník, který každému řidiči připomíná dopravní značku „stop“:



Výpočet plochy vepsaného osmiúhelníku je poněkud obtížnější a do příslušných trigonometrických operací nebudeme zabíhat. Důležité je to, že se stále jedná o úsečky a úhly, nikoli o křivky, takže to Archimedes tehdy dostupnými metodami dokázal provést. A plocha se rovná dvojnásobku druhé odmocniny ze dvou, tedy přibližně 2,83.

Stejnou zábavu si můžeme dopřát i s opsaným osmiúhelníkem

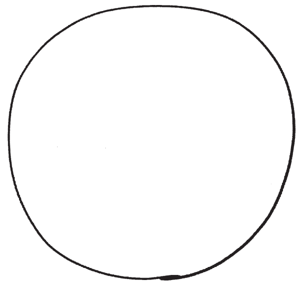


jehož plocha odpovídá $8(\sqrt{2} - 1)$, a je tedy o něco větší než 3,31.

Plocha kruhu je tedy vymezena intervalem od 2,83 do 3,31.

Na tomto místě samozřejmě nemusíme skončit. Můžeme rozmístit body mezi rohy osmiúhelníku (ať už vepsaného, nebo opsaného), abychom vytvořili šestnáctiúhelník.

Po dalších trigonometrických výpočtech zjistíme, že plocha kruhu leží mezi čísly 3,06 a 3,18. Když zopakujeme stejný postup, získáme 32úhelník. Touto cestou se brzy dostaneme k obrazci, který vypadá asi takto:

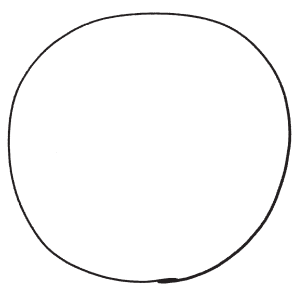


Moment, není to náhodou kruh? Samozřejmě že ne! Je to pravidelný mnohoúhelník se 65 536 stranami. To jste nepoznali?

Geniální postřeh Eudoxa a Archimeda spočíval v tom, že *není důležité*, zda máme před sebou kruh nebo mnohoúhelník s mnoha velmi krátkými stranami. Z jakéhokoli praktického hlediska budou obě plochy téměř stejné. Svou neúnavnou iterací jsme oblast malého okraje mezi kruhem a mnohoúhelníkem „vyčerpali". Je pravda, že kruh je ohraničen křivkou. Každý drobný úsek jeho obvodu však můžeme dobře aproximovat dokonale rovnou úsečkou, stejně jako kousek zemského povrchu, na kterém stojíme, dobře aproximovat dokonale rovnou rovinou.*

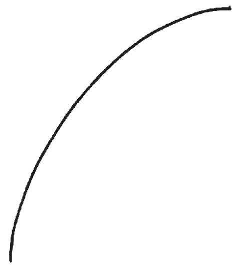
Pamatujme na slogan z názvu kapitoly: lokální přímka, globální křivka.

Nebo se na to podívejte takto. K velikému kruhu se snášíte ze značné výšky. Nejdříve vidíte celý útvar:

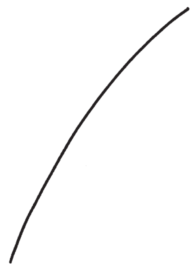


Potom pouze jeden segment oblouku:

* Alespoň v případě, že jako já žijete na rovinatém středozápadě USA.



A později ještě menší segment:



Když se budete neustále přibližovat, nakonec uvidíte něco, co prakticky nelze odlišit od úsečky. Mravenec lezoucí po obvodu kruhu, který vnímá pouze své nejbližší okolí, se může domnívat, že se nachází na rovné linii, stejně jako člověk na zemském povrchu (pokud není dostatečně mazaný, aby si všímal přibližujících se objektů, které se vynořují zpoza horizontu) má pocit, že stojí na rovině.

Na této stránce pochopíte diferenciální počet

Nyní se seznámíte s diferenciálním počtem. Jste připraveni? Myšlenka, za kterou vděčíme Izáku Newtonovi, spočívá v tom, že na dokonalém kruhu není nic speciálního. *Každá* plynulá křivka, když ji dostatečně přiblížíme, vypadá prostě jako přímka. Nezáleží na tom, jak je klikatá nebo spletitá – stačí, když nemá žádné ostré zlomy.

Když vystřelíte projektil, opisuje dráhu takového tvaru: